

**Определение:** *Взаимно однозначное соответствие (биекция)* - соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и обратно.

**Определение:** Два множества называются *эквивалентными*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют *одинаковую мощность*. Обозначение:  $A \sim B$ .

**Замечание:** На вопрос, что такое мощность множества, можно ответить так: мощность - это то, что есть общего у всех эквивалентных между собой множеств (*определение через абстракцию*). Обозначение мощности множества  $A$ :  $\overline{A}$ ,  $|A|$ .

**Определение:** Всякое множество  $A$ , эквивалентное множеству натуральных чисел  $\mathbb{N}$ , называется *исчислимым*, или *счётным*. Обозначение  $\aleph_0$ .

**Определение:** Если множества  $A$  и  $B$  не эквивалентны, но

$$\exists B_1 \subset B, \text{ что } B_1 \sim A \text{ и } \nexists A_1 \subset A, \text{ что } A_1 \sim B,$$

то мы считаем, что  $\overline{A} < \overline{B}$ .

**0.1.** Докажите, что из любого бесконечного множества  $A$  можно выделить счётное подмножество  $D$ .

**0.2.** Докажите, что всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

**0.3.** Докажите, что объединение счётного множества попарно непересекающихся счётных множеств есть счётное множество.

**0.4.** Пусть  $E$  - бесконечное множество,  $D \subset E$ ,  $D$  — не более, чем счётное множество и множество  $E \setminus D$  - бесконечно. Докажите, что множества  $E \setminus D$  и  $E$  равномощны.

**0.5.** Докажите, что если к *произвольному* бесконечному множеству  $A$  прибавить конечное или счётное множество  $B$  новых элементов, то это не изменит его мощности, то есть выполнено  $(A \cup B) \sim A$ .

**0.6.** Пусть  $A$  - произвольное бесконечное множество. Докажите существование множества  $B$  (такого, что  $B \subset A$ , и  $A \setminus B$  — бесконечно), мощность которого равна мощности  $A$ .

**0.7. (теорема Кантора об алгебраических числах)**

Число  $a \in \mathbb{R}$  называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого уравнения вида:  $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0$ , где  $b_j \in \mathbb{Z}$ . Докажите, что множество всех алгебраических чисел счётно.

**Замечание:** Так как множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$  несчётно, то существуют *трансцендентные* (не алгебраические) числа.

**Определение:** Назовём всякое множество, эквивалентное множеству точек отрезка  $[0; 1]$ , *множеством мощности континуума*. Обозначение  $\mathfrak{c}$ .

**0.8.** Докажите, построив взаимно однозначное соответствие, что

- множества  $[0; 1)$ ,  $(0; 1]$  и  $(0; 1)$  имеют мощность континуума.
- множества  $\mathbb{R}$ ,  $(0; +\infty)$ ,  $[0; +\infty)$ ,  $(-\infty; 0]$  и  $(-\infty; 0)$  имеют мощность континуума.

**0.9.** Установите эквивалентность полусегмента  $(0; 1]$  и единичного квадрата  $(0; 1] \times (0; 1]$ .

**0.10.** Установите взаимно однозначное соответствие между множеством иррациональных чисел и множеством действительных чисел.

**0.11.** Докажите, что объединение:

- счётного числа непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума.
- континуума непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума.

**0.12. (теорема Кантора)** Пусть  $X$  — произвольное множество, а  $2^X$  — множество всех его подмножеств, включая  $\emptyset$  и  $X$ . Докажите, что множества  $X$  и  $2^X$  не равномощны.

**Определение:** Назовём мощность множества всех подмножеств сегмента  $[0; 1]$  мощностью *гиперконтинуума*.

**0.13.** Докажите, что множество всех действительных однозначных функций на отрезке  $[0; 1]$  имеет мощность гиперконтинуума.

**0.14.** Докажите, что множество всех двоичных последовательностей имеет мощность континуум.

Пусть  $M \subset \mathbb{N}$  - такое множество, что:

- 1)  $1 \in M$  (база индукции);
- 2)  $\forall n \in \mathbb{N}$  из того, что  $n \in M$  следует, что  $(n + 1) \in M$  (индукционный переход);

Тогда  $M = \mathbb{N}$ .

**1.1. (2) •** Докажите, что

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Как найти сумму квадратов, если ответ неизвестен?

**1.2.** Докажите, что сумма кубов  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  является точным квадратом. Например,  $1 = 1^2$ ,  $1 + 8 = 9 = 3^2$ ,  $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$  и т.д.

### 1.3. (бином Ньютона)

(a) • Докажите, что для  $\forall n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}$  выполнено равенство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k},$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  - биномиальный коэффициент.

**ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ**

|     |   |   |    |    |    |   |                    |
|-----|---|---|----|----|----|---|--------------------|
| n=0 |   |   |    |    | 1  |   | (a+b) <sup>n</sup> |
| n=1 |   |   |    | 1  | 1  |   |                    |
| n=2 |   |   | 1  | 2  | 1  |   |                    |
| n=3 |   | 1 | 3  | 3  | 1  |   |                    |
| n=4 | 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |   |                    |
| n=5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1 |                    |
| n=6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1                  |
|     | . | . | .  | .  | .  | . | .                  |

**Замечание:** Биномиальные коэффициенты легко получаются из *треугольника Паскаля*. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух, расположенных над ним чисел. Продолжать треугольник можно бесконечно.

(б) ★ Сформулируйте и докажите бином Ньютона для *отрицательных* целых  $n$ .

### 1.4. (неравенство Бернулли)

Пусть  $x_i \cdot x_j \geq 0$ ,  $x_i > -1$ , для всех  $i, j = 1, \dots, n$ . Докажите, что

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n.$$

Докажите, что  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$ .

**1.6.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и  $n \geq 2$ . Докажите, что

$$a) \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad b) \bullet \quad 2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (\text{неравенство числа } e).$$

1.7. • Докажите, что  $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

1.8. (a) • Докажите, используя метод математической индукции, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

(б) Докажите данное неравенство без использования метода математической индукции.

(в) Усильте неравенство из пункта (а), доказав равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

**1.9. •** Докажите, что  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$  для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 1.10. (неравенства между "обыкновенными средними")

Пусть  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i > 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Обозначим

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad \Gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Докажите, что  $A_n \geq G_n \geq \Gamma_n$  для  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

**Замечание:** Выражения  $A_n$  называется *средним арифметическим*,  $G_n$  - *средним геометрическим*,  $\Gamma_n$  - *средним гармоническим* чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Замечание:** Отметим, что равенство в данных неравенствах возможно тогда и только тогда, когда выполнено:  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**1.11.** (8) Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Докажите, что  $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ .

**1.12.** (γ) Докажите, что если  $x > -1$ , то справедливо неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad (n \in \mathbb{N}, \ n > 1)$$

причём знак равенства имеет место лишь при  $x = 0$ .

**1.13.** (9) Докажите следующие неравенства:

$$(a) \ 2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n \text{ при } n \in \mathbb{N}, n > 1$$

$$(б) \ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ при } n \in \mathbb{N}.$$

**1.14.** Докажите, что для любых  $x \in (0; 2\pi)$  и  $n \in \mathbb{N}$  выполняется тождество:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

**1.15.** Докажите, что для  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство:

$$\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

**1.16.** Пусть  $k, n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что  $C_n^k \leq \left( \frac{e \cdot n}{k} \right)^k$ , где  $e$  — основание натурального логарифма.

**1.17.** (видоизменённый треугольник Паскаля)

На листке бумаги выписаны числа  $1, 1$ . Вписав между ними их сумму, получим числа  $1, 2, 1$ . Повторив операцию еще раз, получим  $1, 3, 2, 3, 1$ . После трёх операций:  $1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1$ . Какова будет сумма всех чисел после 55 операций?

**1.18.** Из чисел от 1 до  $2n$  произвольно выбрано  $n+1$  число. Докажите, что среди выбранных чисел всегда найдутся два, одно из которых делится на другое.

**1.19.** Пусть  $p \geq 1$  — произвольное действительное число. Докажите, что для любых неотрицательных  $a_1, \dots, a_n$  справедливо неравенство

$$a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p.$$

**1.20.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что каждое из чисел  $n, n+1, n+2$  является суммой двух квадратов. Например:

$$0 = 0^2 + 0^2, \ 1 = 0^2 + 1^2, \ 2 = 1^2 + 1^2.$$

**1.21.** Докажите равенство

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} i_k = C_{m+k}^{k+1}.$$

**1.22.** Докажите, что  $n$  различных прямых, лежащих в одной плоскости, разбивают эту плоскость на области, которые могут быть закрашены красной и синей красками так, что все смежные области (т.е. области, имеющие общий отрезок прямой) будут закрашены разными красками.

**1.23. \*** Предположим, что некоторые из чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  равны  $+1$ , остальные равны  $-1$ . Докажите, что выполняется тождество:

$$2 \sin \left( \left( \alpha_1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} + \dots + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}{2^{n-1}} \right) \frac{\pi}{4} \right) = \alpha_1 \sqrt{2 + \alpha_2 \sqrt{2 + \alpha_3 \sqrt{2 + \dots + \alpha_n \sqrt{2}}}}.$$

**1.24. \*** (теорема Шпернера)

Пусть  $\mathbf{A}$  - некоторое множество, состоящее из  $n$  элементов. Рассмотрим набор подмножеств  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$  из  $\mathbf{A}$  такой, что ни одно из множеств не является частью другого. Докажите следующее неравенство:  $k \leq C_n^{[n/2]}$ .

## Метод математической индукции

Утверждение справедливо для всякого натурального  $n$ , если: 1) оно справедливо для  $n = 1$  и 2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального  $n = k$  следует его справедливость для  $n = k + 1$ .

► Предположим противное, т.е. предположим, что утверждение справедливо не для всякого натурального  $n$ . Тогда существует такое натуральное  $m$ , что:

1. утверждение для  $n=m$  несправедливо,
2. для всякого  $n$ , меньшего  $m$ , утверждение справедливо (иными словами,  $m$  есть первое натуральное число, для которого утверждение несправедливо).

Очевидно, что  $m > 1$ , так как для  $n = 1$  утверждение справедливо (условие 1). Следовательно,  $m - 1$  — натуральное число. Выходит, что для *натурального* числа  $m - 1$  утверждение справедливо, а для следующего натурального числа  $m$  оно несправедливо. Это противоречит условию 2). ■

Конечно, при доказательстве принципа математической индукции мы пользовались тем, что в любой совокупности натуральных чисел содержится наименьшее число. Легко видеть, что это свойство в свою очередь можно вывести как следствие из принципа математической индукции. Таким образом, оба эти предположения равносильны. Любое из них можно принять за одну из аксиом, определяющих натуральный ряд, — тогда другое будет теоремой. Обычно за аксиому принимают сам принцип математической индукции, называя его *аксиомой натуральных чисел*.

Предположим, что  $X \subset \mathbb{R}$ .

**Определение:** Множество  $X$  - ограничено сверху (снизу), если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq C \quad (x \geq C),$$

где  $C$  - верхняя (нижняя) грань множества.

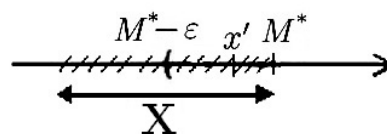
Множество  $X$  - ограничено, если  $\exists C : \forall x \in X \Rightarrow |x| \leq C$ .

**Утверждение:** Множество  $X$  - ограничено тогда и только тогда, когда  $X$  ограничено сверху и снизу.

**Определение:**  $M^* = \sup X$  - точная верхняя грань множества  $X$ , если:

1)  $\forall x \in X \Rightarrow x \leq M^*$ ;

2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in X : x' > M^* - \varepsilon$ .

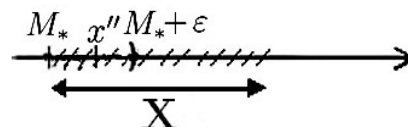


Таким образом,  $\sup X$  есть наименьшая из верхних граней этого множества.

**Определение:**  $M_* = \inf X$  - точная нижняя грань множества  $X$ , если:

1)  $\forall x \in X \Rightarrow x \geq M_*$ ;

2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x'' \in X : x'' < M_* + \varepsilon$ .



Таким образом,  $\inf X$  есть наибольшая из нижних граней этого множества.

**Теорема:** Если множество вещественных чисел содержит хотя бы один элемент и ограничено сверху (снизу), то у этого множества существует точная верхняя (нижняя) грань.

**Определение:** Если  $\exists x^* \in X : \forall x \in X$  выполнено  $x \leq x^*$ , то  $x^*$  называется наибольшим элементом множества  $X$ . Обозначение:  $x^* = \max X$ .

**Определение:** Если  $\exists x_* \in X : \forall x \in X$  выполнено  $x \geq x_*$ , то  $x_*$  называется наименьшим элементом множества  $X$ . Обозначение:  $x_* = \min X$ .

**Замечание:** (отличие  $\sup$  и  $\inf$  от  $\max$  и  $\min$ ):

Точная верхняя (нижняя) грань  $X$  может существовать, но не принадлежать данному множеству. Тогда как  $\max X$  и  $\min X$ , если они существуют, напротив, всегда принадлежат множеству  $X$ . С другой стороны, если  $\exists \max X$ , то  $\sup X = \max X$  (если  $\exists \min X$ , то  $\inf X = \min X$ ).

**Утверждение (Принцип Дирихле):** Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

### 2.1. (17)

(а) Пусть  $\mathbf{X} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$ . Найдите точные верхнюю и нижнюю грани данного множества.

(б) Покажите, что множество вещественных чисел  $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{7}\}$  не имеет наибольшего элемента. Укажите точную нижнюю грань этого множества.

(в) Покажите, что множество рациональных чисел  $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 3\}$  не имеет наименьшего элемента.

2.2. Пусть  $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ . Докажите, что:

$$(а) \bullet \sup \mathbf{X} \leqslant \sup \mathbf{Y} \quad (б) \inf \mathbf{X} \geqslant \inf \mathbf{Y}$$

2.3. Пусть  $\mathbf{A} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ . Докажите, что:

$$(а) \bullet \sup \mathbf{A} = \max \{ \sup \mathbf{X}; \sup \mathbf{Y} \}; \quad (б) \sup \mathbf{B} \leqslant \min \{ \sup \mathbf{X}; \sup \mathbf{Y} \};$$

$$(в) \inf \mathbf{A} = \min \{ \inf \mathbf{X}; \inf \mathbf{Y} \}; \quad (г) \inf \mathbf{B} \geqslant \max \{ \inf \mathbf{X}; \inf \mathbf{Y} \}.$$

2.4. Пусть  $\mathbf{X}$  - ограниченное множество;  $-\mathbf{X}$  - множество чисел, противоположных числам  $x \in \mathbf{X}$ .

$$(а) \bullet \text{Выразите } \inf(-\mathbf{X}) \text{ через } \sup \mathbf{X}; \quad (б) \text{Выразите } \sup(-\mathbf{X}) \text{ через } \inf \mathbf{X}$$

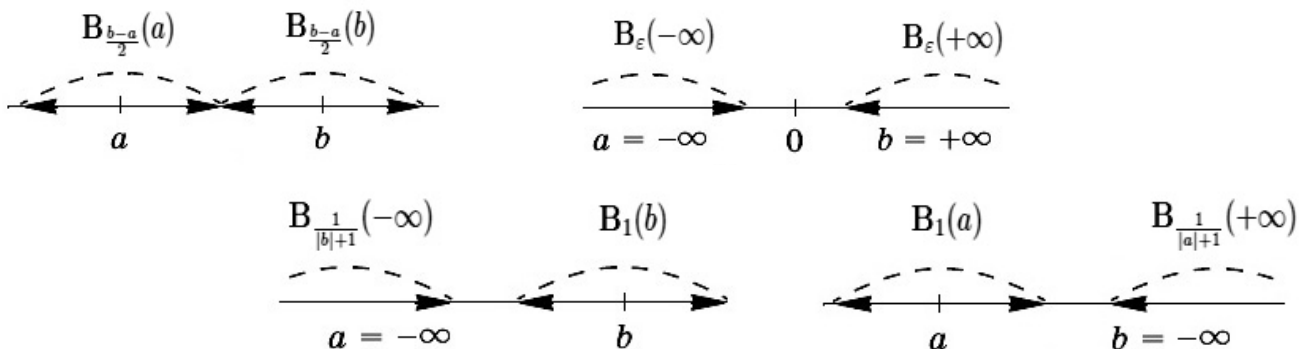
2.5. (19) Пусть  $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$  - множество *всех* сумм  $x + y$ , где  $x \in \mathbf{X}$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ . Докажите равенства:

$$(а) \bullet \inf(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \inf \mathbf{X} + \inf \mathbf{Y}; \quad (б) \sup(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \sup \mathbf{X} + \sup \mathbf{Y}.$$

2.6. (20) Пусть  $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$  - множество *всех* произведений  $x \cdot y$ , где  $x \in \mathbf{X}$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ , причем  $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ . Докажите равенства:

$$(а) \bullet \inf(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = \inf \mathbf{X} \cdot \inf \mathbf{Y}; \quad (б) \sup(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = \sup \mathbf{X} \cdot \sup \mathbf{Y}.$$

2.7. Докажите, что у любых двух различных точек расширенной числовой прямой (т.е. числовой прямой, включающей в себя  $\pm\infty$ ) существуют непересекающиеся окрестности.



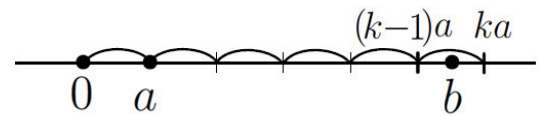
**2.8.** Докажите следующие утверждения:

(а) • *теорема Архимеда:*

Каково бы ни было действительное число  $a$ , существует такое натуральное число  $n$ , что  $n > a$ , т.е.  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > a$ .

(б) *следствие из теоремы Архимеда:*

Каковы бы ни были числа  $a$  и  $b$ ,  $0 < a < b$ , существует такое натуральное число  $k$ , что  $(k-1)a \leq b < ka$ .



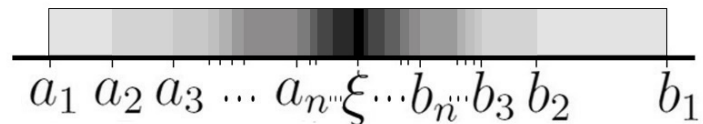
(в) Пусть  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) - произвольные действительные числа. Тогда существует рациональное число  $c$ , заключенное между числами  $a$  и  $b$ .

**2.9. (16)** Покажите, что множество  $\left\{\frac{m}{n}\right\}$  всех правильных рациональных дробей  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$  и  $m < n$ , не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найдите точные нижнюю и верхнюю грани этого множества.

### Принцип вложенных отрезков

**Определение:** Система числовых отрезков

$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots, a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$



называется *системой вложенных отрезков*, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1,$$

т.е. каждый следующий отрезок  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  содержится в предыдущем  $[a_n, b_n]$ :

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

**2.10.** (непрерывность множества действительных чисел в смысле Кантора)

(а) Докажите, что для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.

(б) Докажите, что отрезок  $[0; 1]$  имеет мощность большую, чем бесконечное множество  $\mathbb{N}$ , используя предыдущее утверждение.

**2.11.** Покажите, что для числовых промежутков других типов, нежели отрезки, предыдущее утверждение может уже не иметь места. То есть, найдётся система, например, вложенных интервалов, которая имеет пустое пересечение.

**Замечание:** Отметим, что существуют и такие системы вложенных интервалов, которые имеют непустое пересечение.

**Определение:** Пусть задана система отрезков

$$[a_n, b_n], \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Будем говорить, что *длина*  $b_n - a_n$  *отрезков этой системы стремится к нулю*, если для  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$  такое, что для  $\forall n \geq N(\varepsilon)$  выполняется неравенство  $b_n - a_n < \varepsilon$ .

**2.12.** (*Лемма Кантора*)

Докажите, что для всякой суммы  $[a_n, b_n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка  $\xi$ , принадлежащая всем отрезкам данной системы, причём  $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ .

**2.13.** Докажите, что из всякого бесконечного множества интервалов, объединение которых покрывает отрезок  $[a; b]$  (т.е. любая точка этого отрезка содержится хотя бы в одном из интервалов данного объединения), можно выделить конечное подмножество интервалов, объединение которых также покрывает  $[a; b]$ .

**2.14.** ★ (*Теорема Хелли*)

Пусть  $[a_n; b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  — последовательность отрезков на  $\mathbb{R}$  таких, что каждые два из них имеют, по крайней мере, одну общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая каждому из отрезков.

**2.15.** ★ Пусть  $\alpha$  — иррациональное число. Докажите, что для любых чисел  $a < b$  можно выбрать *целые* числа  $m$  и  $n$ , для которых  $a < m\alpha - n < b$ . Можно ли выбрать числа  $m$  и  $n$  *натуральными*?

**2.16.** ★ Пусть  $G$  — открытое, не ограниченное сверху множество вещественных чисел. Существует ли такое  $\alpha > 0$ , что множество  $G$  содержит бесконечно много точек вида  $n\alpha$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ?

**2.17.** ★ Существует ли такой набор  $I$  интервалов, лежащих в интервале  $(0; 1)$ , что каждая рациональная точка интервала  $(0; 1)$  принадлежит конечному числу интервалов из  $I$ , а каждая иррациональная точка этого отрезка — бесконечному числу интервалов из  $I$ .

**Замечание:** Обратим внимание на то, что набора интервалов  $\tilde{I}$  такого, что каждая рациональная точка интервала  $(0; 1)$  принадлежит бесконечному числу интервалов из  $\tilde{I}$ , а каждая иррациональная точка этого отрезка — конечному числу интервалов из  $\tilde{I}$ , не существует.

**2.18.** ★ Пусть из каждой точки интервала  $(0; 1)$  проведен отрезок положительной длины. Докажите, что сумма длин всех таких отрезков бесконечна.